Χαρακτηρισμός ανοικτών και κλειστών συνόλων με χρήση ακολουθιών

Πρόταση: Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $G \subseteq X$
Τ.Α.Ε.Ι: (i) Το G είναι ανοικτό.
(ii) Για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X και $x \in G$ με $x_n \to x$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \in G$ $\forall n \geq n_0$.

Απόδειξη: (i) ⇒ (ii) Έστω $x \in G$ και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο X με $(x_n) \to x_0$. Εφόσον το G είναι ανοικτό υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε
$B_\rho(x,\varepsilon) \subseteq G$.
Εφόσον $x_n \to x$ έχουμε $\rho(x_0,x) \to 0$ άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_n,x) < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in B_\rho(x,\varepsilon)$ $\forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in G$ $\forall n \geq n_0$.

(ii) ⇒ (i) Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι το G δεν είναι ανοικτό. Τότε υπάρχει $x \in G$ ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ $B_\rho(x,\varepsilon) \nsubseteq G$ δηλ. $B_\rho(x,\varepsilon) \cap (X \setminus G) \neq \emptyset$. Εφαρμόζοντας αυτό για $\varepsilon = \frac{1}{n}$ προκύπτει ότι υπάρχει $x_n \in B_\rho(x, \frac{1}{n})$ με $x_n \notin G$. $\forall n = 1, 2, \dots$
Εφόσον $\rho(x_n,x) < \frac{1}{n}$ $\forall n$ έχουμε ότι $\rho(x_n,x) \to 0$ άρα $x_n \to x$ ενώ $x_n \notin G$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ΑΤΟΠΟ!

Επομένως το G είναι ανοικτό.

Πρόταση: Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $F \subseteq X$.
Τ.Α.Ε.Ι: (i) Το F είναι κλειστό.
(ii) Για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο F και $x \in X$ αν $x_n \to x$ τότε $x \in F$.

Απόδειξη: (i) $\Rightarrow$ (ii) Έστω $(x_n)_{n}$ μια ακολουθία στο F και $x \in X$ ώστε $x_n \to x$. Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι $x \notin F$.
Τότε $x \in X \setminus F$. Αφού το σύνολο $X \setminus F$ είναι ανοικτό υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B_\rho(x,\varepsilon) \subseteq X \setminus F$.
Εφόσον $x_n \to x$, έχουμε $\rho(x_n,x) \to 0$, άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$\rho(x_n,x) < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow x_n \in B_\rho(x,\varepsilon), \ \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow x_n \in X \setminus F, \ \forall n \geq n_0$ Άτοπο

Επομένως $x \in F$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Υποθέτουμε ότι ισχύει το (ii) αλλά ότι το F δεν είναι κλειστό.
Άρα το $X \setminus F$ δεν είναι ανοικτό. Συνεπώς υπάρχει $x \in X \setminus F$ ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$. $B_\rho(x,\varepsilon) \not\subseteq X \setminus F$
δηλ. $B_\rho(x,\varepsilon) \cap F \neq \emptyset$

Έστω για κάθε $n \in \mathbb{N}$ $B_\rho(x,\frac{1}{n}) \cap F \neq \emptyset$
άρα υπάρχει $x_n \in F$ με $\rho(x_n,x) < \frac{1}{n}$. Συνεπώς $\rho(x_n,x) \to 0$ άρα

$x_n \to x$.

(Από υπόθεση (i) προκύπτει $x \in F$ (άτοπο) (διότι $x \in X - F$)
Επομένως το F είναι κλειστό.

Πρόταση: (Βασικές ιδιότητες κλειστών συνόλων)
Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος.
i) Το $\emptyset, X$ είναι κλειστά.
ii) Αν A, B είναι κλειστά, ότι το $A \cup B$ είναι κλειστό.
iii) Αν $(F_i)_{i \in I}$ οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X, τότε το $\bigcap_{i \in I} F_i$ είναι κλειστό

Απόδειξη: (i) Το $\emptyset$ είναι κλειστό, διότι $X \setminus \emptyset = X$, που είναι ανοικτό.
Το X είναι κλειστό διότι $X \setminus X = \emptyset$, που είναι ανοικτό.

ii) Έστω A, B κλειστά.
Τότε το $X \setminus A$, $X \setminus B$ είναι ανοικτό, άρα το $(X \setminus A) \cap (X \setminus B) = X \setminus (A \cup B)$ είναι ανοικτό.

Άρα το $A \cup B$ είναι κλειστό.

iii) Έστω $(F_i)_{i \in I}$ οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X. Τότε το $X \setminus F$ είναι ανοικτό για κάθε $i \in I$.
Άρα $\bigcup_{i \in I} (X - F_i)$ είναι ανοικτό. Όμως, $\bigcup_{i \in I} (X \setminus F_i) = X \setminus (\bigcap_{i \in I} F_i)$
Έτσι, αφού το $X \setminus \bigcap_{i \in I} F_i$ είναι ανοικτό, τότε το $\bigcap_{i \in I} F_i$ είναι κλειστό.

Παρατήρηση: Από το (ii) προκύπτει άμεσα με επαγωγή ότι αν $A_1, \dots, A_n$ κλειστά (όπου $n \in \mathbb{N}$), τότε $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ είναι κλειστό.

Δεν ισχύει εν γένει ότι η άπειρη ένωση κλειστών συνόλων είναι κλειστό.
[τον $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική τα σύνολα $F_n = [\frac{1}{n}, 1]$ είναι κλειστά $\forall n \in \mathbb{N}$.
Όμως $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = [0,1]$ το οποίο δεν είναι κλειστό.
(Διότι το συμπλήρωμά του, δηλ το $(-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$ δεν είναι ανοικτό)

<u>Ορισμός</u>: Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος, με $A \subseteq X$ και $x \in X$. Το x λέγεται σημείο επαφής του A, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $B_\rho(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Συμβολίζουμε με $\bar{A}$ το σύνολο των σημείων επαφής του A.
Το $\bar{A}$ ονομάζεται κλειστή θήκη του A. (ή κλειστότητα του A)

<u>Παραδείγματα</u>: α) Προφανώς, $A \subseteq \bar{A}$ για κάθε A. Στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική για $A = (0,1)$, βλέπουμε ότι το 0 είναι σημείο επαφής του A.
Το 1 είναι επίσης σημείο επαφής του A.
Έτσι $[0,1] \subset \bar{A}$.
β) Αν $x<0$ ή αν $x>1$ τότε $x \notin \bar{A}$. Επομένως $\bar{A} = [0,1]$.

γ) Στο διακριτό μετρικό χώρο (X,ρ). Αν $A \subseteq X$, τότε το x είναι σημείο επαφής του A αν και μόνο αν $x \in A$ (δηλ. $\bar{A} = A$)
Πράγματι, $A \subseteq \bar{A}$, ενώ αν $x \notin A$ τότε $B_\rho(x, \frac{1}{2}) \cap A = \{x\} \cap A = \emptyset$.
άρα $x \notin \bar{A}$.

δ) Αν (X,ρ) μ.χ. (x_n) ακολουθία στο X και $x \in X$ με $x_n \to x$ τότε το x είναι σημείο επαφής του $A = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\varepsilon > 0$ τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_0$ $\rho(x_n, x) < \varepsilon$
$\Rightarrow x_n \in B_\rho(x,\varepsilon)$
$B_\rho(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ $\forall \varepsilon > 0$

Άρα $x \in \bar{A}$.

Πρόταση: Έστω (X,ρ) μ.χ. $A \subseteq X$ και $x \in X$. Τότε $x \in \bar{A} \Leftrightarrow$ Υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A με $x_n \to x$.

Απόδειξη: $(\Rightarrow)$ Εφόσον $x \in \bar{A}$ έχουμε $B_\rho(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ $\forall \varepsilon > 0$ άρα $B_\rho(x,\frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Επιλέγουμε $x_n \in B_\rho(x,\frac{1}{n}) \cap A$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Έχουμε $x_n \in A, \forall n \in \mathbb{N}$

$\rho(x_n,x) < \frac{1}{n}$ $\forall n$, άρα $x_n \to x$

$(\Leftarrow)$ Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο A με $x_n \to x$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_n,x) < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$

$\Rightarrow x_n \in B_\rho(x,\varepsilon)$, $\forall n \geq n_0$

Συνεχώς $x_n \in B_\rho(x,\varepsilon) \cap A$ $\forall n \geq n_0$

άρα $B_\rho(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

Επομένως $x \in \bar{A}$.

Παρατήρηση: Έστω (X,ρ) μ.χ. και $A \subseteq X$. Τότε το $\bar{A}$ είναι κλειστό σύνολο.

α' απόδειξη: Με χρήση του χαρακτηρισμό των κλειστών συνόλων με ακολουθίες. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στο $\bar{A}$ και $x \in X$ ώστε $x_n \to x$.

Για κάθε n, εφόσον $x_n \in \bar{A}$ υπάρχει $y_n \in A$ με $\rho(y_n,x_n) < \frac{1}{n}$

έχουμε $\rho(y_n,x) \leq \rho(y_n,x_n) + \rho(x_n,x) < \frac{1}{n} + \rho(x_n,x) \to 0$

Άρα $y_n \to x$. Επομένως $x \in \bar{A}$.

Κλειστή θήκη του A
$\bar{A}$
$cl(A)$
$cl_{\rho}(A)$

Παραδείγματα: Στον $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική
$\overline{(a,b)} = [a,b]$, $\overline{[a,b)} = [a,b]$, $\overline{(a,b]} = [a,b]$
$\overline{[a,b]} = [a,b]$
$\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Πρόταση: Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A, B \subseteq X$.
Τότε (α) $A \subseteq \bar{A}$ και το $\bar{A}$ είναι κλειστό.
(β) $\bar{A} = \bigcap \{F : F$ κλειστό υποσύνολο του $X, F \supseteq A\}$
(γ) $A = \bar{A} \Leftrightarrow A$ κλειστό
(δ) Αν $A \subseteq B$ τότε $\bar{A} \subseteq \bar{B}$
(ε) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
(στ) $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$

Απόδειξη: (α) Το αποδείξαμε νωρίτερα
(β) Το $\bar{A}$ είναι κλειστό με $A \subseteq \bar{A}$, άρα $\bigcap \{F, F$ κλειστό $F \supseteq A\} \subseteq \bar{A}$.

Αντίστροφα έστω $x \in \bar{A}$.
Θα δ.ο. για κάθε F κλειστό με $F \supseteq A$, ισχύει $x \in F$.
Εφόσον $x \in \bar{A}$ υπάρχει $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στο A, με $x_n \to x$.
Εφόσον $A \subseteq F$ έχουμε $x_n \in F$.
Εφόσον F κλειστό συμπεραίνουμε ότι $x \in F$, $\forall n \in \mathbb{N}$
Άρα $\bar{A} \subseteq \bigcap \{F : F$ κλειστό $F \supseteq A\}$
Επομένως $\bar{A} = \bigcap \{F$ κλειστό $: F \supseteq A\}$

Πέμπτη δεν έχουμε μάθημα

Αναπλήρωση:
Παρασκευή 5-8

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ

1ο φυλλάδιο ασκήσεων

1) Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $f : X \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Ορίζουμε $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ με $\rho(x,y) = |f(x) - f(y)|$.
α) Αν η f είναι 1–1 να δείξετε ότι η ρ είναι μετρική στον X.
β) Αν η f δεν είναι 1–1 να δειχθεί ότι η ρ δεν είναι μετρική στον X.

2) α) Αν ο ρ είναι μια μετρική στο X, να δείξετε ότι η $d : X \times X \to \mathbb{R}$ με $d(x,y) = \sqrt{\rho(x,y)}$ είναι επίσης μετρική στον X.
β) Να δείξετε ότι δεν ισχύει γενικά ότι αν ρ είναι μια μετρική στο X τότε η $d : X \times X \to \mathbb{R}$ με $d(x,y) = (\rho(x,y))^2$ είναι μετρική στον X.

3) Έστω $k \in \mathbb{N}$ και $(X_i, \rho_i)_{i=1}^k$ μετρικοί χώροι. Θεωρούμε το καρτεσιανό γινόμενο

$$X = \prod_{i=1}^k X_i = \{(x_1, \ldots, x_k) :\ x_i \in X_i,\ i = 1, \ldots, k\}$$

και τη $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$\rho\Big((x_1, \ldots, x_k), (y_1, \ldots, y_k)\Big) = \sum_{i=1}^k \rho_i(x_i, y_i).$$

α) Να δείξετε ότι η ρ είναι μετρική στο X.
β) Αν $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία στον X με $\vec{x}_n = (x_n^1, \ldots, x_n^k)$, $n = 1, 2, \ldots$ και $\vec{x} = (x^1, \ldots, x^k) \in X$, να δείξετε ότι $\vec{x}_n \xrightarrow{\rho} \vec{x}$ αν και μόνο αν $x_n^i \xrightarrow{\rho_i} x^i$ για $i = 1, \ldots, k$.

4) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $x, y \in X$ και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δυο ακολουθίες στο X με $x_n \to x$ και $y_n \to x$. να δειχθεί ότι $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$.

5) Αν (X, ρ) είναι μετρικός χώρος, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δυο ακολουθίες στο X και $x \in X$ ώστε $\rho(x_n, y_n) \to 0$ και $x_n \to x$, να δείξετε ότι $y_n \to x$.

6) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον X και $x \in X$. Να δείξετε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο x αν και μόνο αν κάθε υπακολουθία της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει περεταίρω υπακολουθία που συγκλίνει στο x.

7) Έστω (X, ρ), (Y, d) δυο μετρικοί χώροι, $f : X \to Y$ μια συνάρτηση και $x \in X$. Αν για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X με $x_n \to x$ η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία στον (Y, d), να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο x.

8) Δώστε παράδειγμα μετρικού χώρου (X, ρ), $x_1, x_2 \in X$ και $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ ώστε η ανοικτή μπάλα $B_\rho(x_2, \varepsilon_2)$ να είναι γνήσιο υποσύνολο της ανοικτής μπάλας $B_\rho(x_1, \varepsilon_1)$.

9) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, και $x_1, \ldots, x_n$ διαφορετικά ανά δύο στοιχεία του X. Να δείξετε ότι υπάρχουν ανοικτά σύνολα $U_1, \ldots, U_n$, ξένα ανά δύο με $x_i \in U_i$ για $i = 1, \ldots, n$.